

**DYDAKTYKA TEORII PŁYT I POWŁOK SPRĘŻYSTYCH
NA SEKCJI *TEORIA KONSTRUKCJI*
WYDZIAŁU INŻYNIERII LĄDOWEJ
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ**

Streszczenie. Przedmiotem referatu jest koncepcja dydaktyczna wykładu z *Teorii Płyt i Powłok Sprężystych* na Wydziale Inżynierii Lądowej Politechniki Warszawskiej. Wykłady te są prowadzone w ramach specjalności *Konstrukcje Budowlane i Inżynierskie* na Sekcji *Teoria Konstrukcji*. Wykład obejmuje podstawowe zasady tworzenia teorii płyt cienkich, płyt warstwowych, płyt średniej grubości oraz powłok cienkich w zakresie sprężystym. Do roku 1986 wykłady te prowadził Profesor Zbigniew Mazurkiewicz. Celem tego referatu jest dokładne omówienie Jego koncepcji dydaktycznej- sukcesów i porażek w próbie popularyzacji trudnych zagadnień mechaniki płyt i powłok wśród wybranej grupy studentów inżynierii lądowej.

1. PODSTAWY MATEMATYCZNE WYKŁADU

Od lat siedemdziesiątych do roku 1986 wykłady z *Teorii Płyt i Powłok Sprężystych* (TPiPS) na Wydziale Inżynierii Lądowej Politechniki Warszawskiej były prowadzone przez Profesora Zbigniewa Mazurkiewicza w ramach specjalizacji *Teoria Konstrukcji*. Pewne elementy tej tematyki były także wykładane studentom specjalności KBI w ramach przedmiotu *Teoria Sprężystości i Plastyczności*. Niniejszy referat dotyczy jednak tylko kursu na *Teorii Konstrukcji* (TK) i nawiązywać będzie do dydaktyki tego samego przedmiotu wykładanego studentom specjalizacji *Budownictwo* w ramach Studium Podstawowych Problemów Techniki na PW w latach 1976-77. W kwietniu 1987r. Profesor Zbigniew Mazurkiewicz doznał udaru mózgu, przeżył ten wstrząs, ale nigdy już nie wrócił do życia zawodowego. Swoje obowiązki dydaktyczne przekazał autorowi tego artykułu. Mimo wprowadzanych modyfikacji myśl przewodnia wykładu Profesora Mazurkiewicza nie uległa jednak zmianie. Omówienie tej koncepcji dydaktycznej jest celem niniejszego referatu. Często odwoływać się będziemy do książek:[1],[2]; zakładamy, że Czytelnik ma te książki do dyspozycji.

Wykłady z *teorii płyt i powłok sprężystych* muszą być poprzedzone wykładami z *teorii sprężystości* oraz kursami *geometrii różniczkowej powierzchni i rachunku wariacyjnego*. Doświadczenie dydaktyczne uczy, że logiczne następstwa przedmiotów są niezbędne; w przeciwnym razie studenci czują się oszukani, ogarnia ich zniechęcenie a egzekucja nauczania staje się niemożliwa. Można zaryzykować pogląd, że student nie ma żadnych szans w pracy własnej nad sobą. Współczesne monografie z teorii sprężystości, geometrii różniczkowej oraz rachunku wariacyjnego nie nadają się wcale dla studentów politechnik, bez względu na to z jaką winietą ukazały się na rynku. Warto tu odnotować, że np. książka [3]

ukazała się w serii *Matematyka dla Politechnik*. Wystarczy ją otworzyć na dowolnej stronie a ogarnia nas pusty śmiech. Równie dobrze książka ta mogłaby ukazać się w języku suahili. Istotnie, nie odegrała żadnej roli dydaktycznej. Można tu przytaczać też inne, mniej drastyczne przykłady. Wniosek jest mniej więcej taki: student pozbawiony pomocy niczego sam się nie nauczy. Logicznie ustawiony proces dydaktyczny można porównać do wytyczonego szlaku w górach; znakami tego szlaku są specjalnie opracowane materiały dydaktyczne - przekazywane ustnie lub w formie podręczników. Bez tych znaków i tego szlaku wędrówka po łatwej drodze zamienia się w niepotrzebną eksplorację - zamiast przejść całą drogę możemy utknąć w kosodrzewinie, całkiem niedaleko od początku szlaku.

Bez względu na to, w jakim otoczeniu dydaktycznym prowadzi się zajęcia z teorii płyt i powłok trzeba więc zadbać o elementarne podstawy teorii sprężystości, geometrii różniczkowej i rachunku wariacyjnego. Na kursie *Teorii Konstrukcji* były kiedyś organizowane zajęcia wyrównawcze z podstaw matematycznych. W wyniku redukcji liczby godzin do 24/tydzień kursy te musiały być skasowane a niezbędne elementy matematyki przesunięte do przedmiotów specjalistycznych. Elementy rachunku tensorowego, głównie algebry tensorów, były wykładane w ramach kursu teorii sprężystości. Te podstawy ułatwiały omówienie geometrii różniczkowej powierzchni - w ramach wykładów z teorii płyt i powłok sprężystych (TPiPS).

Obecnie wykłady z TPiPS rozpoczynają się wstępem z rachunku wariacyjnego. Z konieczności trzeba przypomnieć pojęcie przestrzeni liniowej a następnie przestrzeni funkcyjnej. Wykłady trzeba prowadzić pogładowo z wieloma prostymi przykładami, tak aby nowe pojęcia matematyczne od razu były wiązane z pojęciami z mechaniki, takimi jak przestrzeń dopuszczalnych przemieszczeń, zbiór dopuszczalnych naprężeń, podatność, praca wirtualna naprężeń, itd. Okazuje się, że studenci 8. semestru zupełnie nie zdają sobie sprawy z tego, że najbardziej znane eliptyczne zadania brzegowe sprowadzają się do prostego równania postaci

$$a(u, v) = f(v) \quad \forall v \in V, \quad (1.1)$$

gdzie $a(.,.)$ jest formą dwuliniową a $f(.)$ formą liniową. W szczególności istotne jest, aby studenci umieli znaleźć wszystkie konsekwencje tego równania, czyli wykorzystać dowolność v w przestrzeni V . Z pozoru wydawać by się mogło, że równanie (1.1) powinno być znane jako równanie pracy wirtualnej. Ta informacja niewiele pomaga, jest raczej myląca. Równanie pracy wirtualnej, które na zajęciach z mechaniki budowli zapisuje się w niejasnej postaci $\bar{L}_w = \bar{L}_z$ (równość prac sił wewnętrznych i zewnętrznych) jest rozumiana jako ciekawa i przydatna równość dwu liczb, z której korzysta się w celu powiązania linii ugięcia i linii wpływu. Nie mówi się jednak, że równość ta jest równoważna wszystkim równaniom równowagi, gdy kreska dotyczy przemieszczeń i odkształceń oraz równaniom nierozdzielności, gdy kreska dotyczy obciążeń i sił wewnętrznych. Trzeba więc studentów przekonać, że (1.1) jest w istocie równaniem równowagi (lub układem tych równań, łącznie z warunkami równowagi elementów brzegu) i że innych równań równowagi nie ma. Trzeba przy okazji wykazać, że także globalne równania równowagi konstrukcji (czyli warunki zerowania się wypadkowych wektorów sił i momentów) wynikają z (1.1), inaczej być nie może. Pouczające jest też pokazanie, że dodatnia określoność formy $a(.,.)$ implikuje jednoznaczność rozwiązania. Warto też wykazać, że rozwiązanie u minimalizuje energię potencjalną

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - f(v) . \quad (1.2)$$

Ten dowód jest tak ważny, że trudno go pominąć. Zauważmy, że dowód ten nie jest o wiele trudniejszy niż wykazanie, bez przywoływania pojęcia pochodnej, iż rozwiązanie równania arytmetycznego: $kq=Q$ (tutaj k, q, Q to liczby) jest elementem minimalizującym funkcję $f(p) = kp^2/2 - Qp$.

Ze względu na metodykę tworzenia teorii płyt Reissnera (1945), [4], warto sformułować twierdzenie Castigliano. Korzystamy z ujęcia przedstawionego w książce Nečasa i Hlavačka [5]. Ujęcie to jest ściśle, ale nie tak formalne jak u Duvaut i Lionsa [6]. Autor niniejszego artykułu próbował skorzystać też z innych źródeł, gdzie twierdzenie Castigliano powinno być dobrze wytłumaczone, ale bez powodzenia; nie udało się znaleźć książki po polsku, w której to twierdzenie jest poprawnie sformułowane i udowodnione. Zauważmy, że dowód twierdzenia Castigliano podany przez Nečasa i Hlavačka jest dość prosty i może być przekazany studentom wydziałów budowlanych. Jeśli czasu braknie, można ten dowód przekazać w formie pisemnej. Zauważmy, że ten dowód łatwo przenosi się na teorię konstrukcji prętowych i na teorię płyt. Takie uogólnienie jest dobrym ćwiczeniem dla studentów TK i doktorantów.

Od twierdzenia Castigliano do funkcjonału siodłowego Reissnera (1950), [7], jest tylko krok. Warto więc ten krok zrobić, co ułatwia potem wyprowadzenie równań płyt Reissnera (1945), por. [2, p. 5.7.1].

Po dwu- trzech tygodniach należy zmienić tematykę i rozpocząć teorię krzywej przestrzennej a następnie teorię powierzchni. Studenci znają już teorię krzywoliniowych układów współrzędnych w przestrzeni. Przejście do teorii powierzchni nie jest więc zaskakujące. Wykład rozpoczynamy od p.2 str. 26 książki [1]. Studenci z chęcią słuchają tego fragmentu wykładu, gdyż czują, że są to zupełnie podstawowe wiadomości, definiujące pojęcia często pojawiające się w książkach dotyczących projektowania przekryć powłokowych, takie jak np. krzywizna Gaussa. Po raz kolejny wykład z TPiPS wypełnia lukę w dydaktyce na Wydziale IL. Zawsze, gdy wykładam te elementarne pojęcia geometrii powierzchni odnoszę wrażenie, że tych wykładów powinni słuchać wszyscy studenci IL a nie tylko mała grupa TK.

Wykład z geometrii powierzchni jest z konieczności elementarny, ale nie jest błędny i nie ma luk. Nawet twierdzenie Gaussa podawane jest z dowodem. Trudno jednak wymagać aby udało się podać dowód twierdzeń Bonnetta. Te twierdzenia są jednak bardzo sugestywne i studenci akceptują brak dowodów. Pod kątem dalszych zastosowań omawiana jest specyfikacja formuł w przypadku współrzędnych ortogonalnych niekrzywiznowych. Nic tak nie pomaga w zrozumieniu teorii jak dobrze dobrane i efektowne przykłady a o te nietrudno w dziale teorii powierzchni. Nawet geometria powierzchni rozpiętej nad obszarem płaskim stanowi dobry przykład- można prześledzić wpływ gradientów powierzchni na składowe tensora krzywizn oraz przekonać się o nieortogonalności siatki linii parametrycznych generowanych przez rzutowanie siatki ortogonalnej na płaszczyźnie. Warto omówić dowolną powierzchnię obrotową- znów aż trudno uwierzyć, że to jest wykład dla specjalizacji a nie dla wszystkich studentów. Interesująca jest też powierzchnia śrubowa. Przy okazji przypomina się inne podstawowe powierzchnie, takie jak paraboloidy i hiperboloidy.

Zadaniem, które łączy rachunek wariacyjny i geometrię różniczkową jest poszukiwanie równań parametryzujących krzywe geodezyjne, czyli najkrótsze krzywe leżące na powierzchni, łączące dwa punkty. Zdolniejsi studenci potrafią wyprowadzić te nieliniowe

równania korzystając z podanych metod matematycznych. Tym akcentem kończymy wstęp matematyczny i rozpoczynamy wykłady z teorii płyt.

2. TEORIA PŁYT SPRĘŻYSTYCH

Punktem wyjścia jest wariacyjne sformułowanie zadania brzegowego teorii sprężystości, równoważne zapisowi (1.1). Wyprowadzenie teorii płyt polega na rozsądnym zawężeniu przestrzeni (lub zbioru, w wypadku niejednorodnych warunków brzegowych) pól dopuszczalnych przemieszczeń. Najłatwiej zacząć od teorii Hencky'ego (1947, [8]), którą nie bez racji Francuzi nazywają teorią naturalną.

Zatem naturalne więzy postaci

$$v_\alpha(x_1, x_2, x_3) = x_3 \psi_\alpha(x_1, x_2), \quad v_3(x_1, x_2, x_3) = v(x_1, x_2), \quad \alpha = 1, 2. \quad (2.1)$$

nakładamy na pole próbne $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Bardzo jest istotne to, że więzy dotyczą pól próbnych. Niestety, w wielu podręcznikach pisze się, że więzy dotyczą pól szukanych, co jest bardzo mylące. Jest jasne, że więzy (2.1) dotyczą też pól szukanych. W przeciwnym razie odeszlibyśmy od klasycznych metod, które zachowują symetrię formy $a(\cdot, \cdot)$. Jeśli postąpimy umiejętnie, to (por. str. 235-236 książki [2]) przejście od (1.1) do wariacyjnego sformułowania teorii Hencky'ego jest naprawdę bardzo łatwe i może być przyswojone przez każdego studenta. Później należy sformułować twierdzenie o minimum energii potencjalnej. Następnie można wyprowadzić równania lokalne teorii. Takie przejście jest matematycznie proste - trzeba skorzystać z dowolności pól ψ_α, v . Przejście do równań w układzie biegunowym można pokazać bezpośrednio (tak jak w podręcznikach S. Timoshenki) lub z wykorzystaniem rachunku tensorowego. Jednak oba te wyprowadzenia powinny być dobrze znane studentom. Rozwiązywanie zadań zostawiamy na później. Przechodzimy do teorii płyt Kirchhoffa narzucając warunek zerowania się poprzecznych odkształceń postaciowych (stąd mamy $\boldsymbol{\psi} = -\nabla v$) na poziomie sformułowania wariacyjnego. Dość łatwo znajdujemy sformułowanie wariacyjne Kirchhoffa. Przejście do sformułowania lokalnego jest dość trudno wymyślić, ale jeśli skorzystamy z elementarnych tożsamości (3.1.14-3.1.15 w [2]) oraz z reprezentacji (3.1.20, 21, tamże) otrzymamy bez kłopotów wszystkie równania lokalne teorii, łącznie z formułami na siły skupione w narożach. W tym miejscu wykładowca czuje się naprawdę szczęśliwy, gdyż udało mu się zrzucić z treści wykładu naiwne obrazki, w których momenty skręcające są poddawane śmiesznej metamorfozie w siły poprzeczne na brzegu. Czujemy ulgę - o jedno starocie mniej.

Zazwyczaj omawiamy statykę płyt prostokątnych w ujęciu Hencky'ego i Kirchhoffa z wykorzystaniem podwójnych i pojedynczych szeregów Fouriera. Warto pokazać zastosowanie szeregów Fouriera w ujęciu wariacyjnym, które zezwala na uwzględnienie obciążeń w postaci momentów rozłożonych w sposób ciągły wzdłuż brzegów swobodnie podpartych oraz obciążeń skupionych wzdłuż krzywych. Otrzymuje się formuły Jemielity [9], bez korzystania z teorii dystrybucji, zarówno w metodzie Levy'ego jak i w metodzie Naviera. Na tej podstawie wydaje się projekt: statyka płyty prostokątnej. Niekiedy przyjmuje się, że płyta jest warstwowa z miękkim rdzeniem w ramach ujęcia Hoffa i Reissnera, por. p.6.3 w [2]. Sztywności takiej płyty dane są wzorami (6.1.12), tamże. W celu wykonania obliczeń i wykresów studenci korzystają z MathCada, rzadziej z Maple'a lub MatLaba, których nie byli uczeni. W projekt ten można wpleść elementy projektowania na drodze sprawdzenia pracy

plyty przy różnych parametrach określających jej poprzeczną niejednorodność oraz przy różnych stosunkach grubości do rozpiętości.

Nie można pominąć statyki płyt kołowych i pierścieniowych, także w zakresie teorii płyt średniej grubości. W celu lepszej analizy tych płyt warto nawiązać do teorii Reissnera (1945, [4]). Najczęściej nie ma już czasu na jej porządne wyprowadzenie, można więc rozdać notatki wykładowe w duchu wyprowadzenia podanego w p.5.7.1. książki [2].

Szczególnie interesująca jest analiza płyt kołowych obciążonych siłą skupioną w środku. Z jednej strony- ujawnia się drastyczna różnica między przewidywaniami w ramach teorii Kirchhoffa, Hencky'ego i Reissnera. Z drugiej- widać, że opisy lepsze są bardziej precyzyjne i bardziej czułe na sposób obciążenia. Warto dodać, że rozwiązanie ważnego zadania omówionego w p.15 książki [10] jest błędnie omówione. Pełny opis dojścia do wyników końcowych, dość złożony i wymagający cierpliwości, jest rozdawany w formie notatek studentom TK do przestudiowania.

Analiza płyt w zakresie pracy plastycznej jest przedmiotem wykładu *Stany Graniczne Konstrukcji*, które od wielu lat prowadzi Profesor Wiesław Wojewódzki, por. [11].

Jeśli jest na to czas, można studentom przedstawić teorię płyt von Karmana. Jej wyprowadzenie jest łatwe, o ile jest prowadzone w sposób wariacyjny, tak jak w p.4.1 książki [2]. Warto potem omówić wyboczenie płyt prostokątnych.

Wykłady z teorii płyt nie obejmują metody elementów skończonych, która jest omawiana na innych przedmiotach TK. Warto zauważyć, że potężne narzędzia MES, takie jak system ABAQUS, zezwalają na analizę płyt elementami trójwymiarowymi, przez co w ogóle omija się specyficzne trudności związane ze skończeniem-elementową aproksymacją zadań Hencky'ego i Kirchhoffa.

Wykłady z teorii płyt obejmują także proste zadania dynamiki płyt średniej grubości i płyt cienkich.

3. TEORIA CIENKICH POWŁOK SPRĘŻYSTYCH

Konstruowanie teorii powłok cienkich nie jest prostym uogólnieniem konstrukcji teorii płyt, gdyż w równaniach pojawia się tensor krzywizny powierzchni środkowej. Najprostsze wyprowadzenie wychodzące z opisu trójwymiarowego (dwuwymiarowych podejść bezpośrednich, które zawieszają w próżni kwestię związków konstytutywnych, nie akceptujemy !) bazuje na hipotezie płaskich przekrojów, por. (16.1.23) w [2]. Trzeba jednak znaleźć potem formuły określające składowe stowarzyszonego pola odkształceń odniesione do bazy w dowolnym punkcie powłoki. Są to formuły Naghdiego [12], por. (16.1.24, [2]). Zakładamy, że Czytelnik jest w posiadaniu książki [2] i nie podajemy tutaj tych ważnych lecz dość złożonych wzorów. Niestety, wyprowadzenie wzorów Naghdiego nie jest krótkie, można je znaleźć w [12]. Wzory te zawierają tzw. translatory (shifters) oraz pewne asymetryczne pola zależne od pochodnych kowariantnych pól przemieszczeń i obrotów. Właśnie te wzory Naghdiego są kluczowe w wyprowadzeniu równań równowagi powłok. Ciąg dalszy wyprowadzenia jest podobny jak w teorii płyt Hencky'ego. Wzory Naghdiego wstawiamy do wariacyjnego równania równowagi (por. 16.1.29 w [2]), definiujemy siły wewnętrzne (por. 16.32, tamże) i znajdujemy wariacyjne równania równowagi powłoki średniej grubości, por. 16.1.31, tamże. Stąd już prosta droga do pełnego, wariacyjnego, sformułowania teorii powłok średniej grubości.

Wędrowka od tego sformułowania do zadania powłoki cienkiej nie jest ani łatwa ani jednoznaczna. Pamiętamy, że dopiero w latach 1959-1963 r. prace Budiansky'ego, Sandersa i Koitera wyjaśniły kwestię najlepszego wariantu teorii powłok cienkich, tzw. pierwszego

przybliżenia. Tego „najlepszego” wariantu teorii powłok w pracy Naghdiego[12] nie znajdziemy. Zabrakło tam tej „kropki nad i”. Jednak w pracy oryginalnej Budiansky’ego i Sandersa (cytowanej w [1], [2]) brak jest pewnych przekształceń. Czytelnika zainteresowanego przejściem od teorii Naghdiego do teorii Budiansky’ego i Sandersa odsyłamy do p.16.3 w [2].; kluczowa jest tożsamość (16.3.4) tłumacząca przyjęty wybór miar sił wewnętrznych i odkształceń.

Tak przedstawia się ujęcie tensorowe liniowej teorii powłok cienkich. Jednak wykład Profesora Mazurkiewicza nie biegnie tymi ścieżkami, choć są one strome lecz krótkie (częściowo to podejście było omawiane na wykładach dla grup kierunku *Budownictwo, SPPT*, przez dwa lata, pod koniec lat siedemdziesiątych; potem kursy te zlikwidowano- nie wzbudzały zainteresowania opiniotwórczych kół pracowników samodzielnych Wydziału IL). Względy dydaktyczne kazały Profesorowi Mazurkiewiczowi zrezygnować z ujęcia tensorowego, ograniczyć rozważania do opisu ortogonalnego niekrzywiznowego i wziąć na swe barki ciężar formuł jawnie zależnych od funkcji Lamé. Pewne uwagi na temat tej koncepcji dydaktyki powłok zawarte są we wspomnieniu o Profesorze, por.[13]. Mimo upływu lat wykład z teorii powłok jest nadal prowadzony zgodnie z koncepcją Profesora Mazurkiewicza. Narzucenie więzów Kirchhoffa-Love’a prowadzi do specyficznej postaci pól odkształceń wewnątrz powłoki, por. (5.23b) w [1]. Te wzory są równoważne formułom Naghdiego (16.1.24, [2]). Po znalezieniu formuł (5.23b) możemy dość łatwo wyprowadzić, ściśle w ramach teorii Kirchhoffa-Love’a, wzór na energię odkształcenia powłoki cienkiej, (5.50),[1]. Zauważmy, że prawa strona (5.50)[1] jest równoważna lewej stronie wzoru nad (16.2.4) w [2]. Mimo tych analogii nie ma wątpliwości, że wzory w [1] są o wiele lepiej wytłumaczone; w szczególności dokładnie omówiono sens fizyczny sił wewnętrznych. Istotną pomocą jest także operowanie tzw. składowymi fizycznymi tensorów sił wewnętrznych i odkształceń. Ponadto wyprowadzenie Mazurkiewicza ukazuje powłokową specyfikę zagadnienia; widać np. jak przekręca się baza wzdłuż wzdłuż osi z i jak to zwichrzenie wpływa na postać definicji sił wewnętrznych, por. (5.41), [1].

Poziom ogólności opisu – układ ortogonalny niekrzywiznowy- umiejscawia ujęcie Mazurkiewicza pomiędzy poziomem ogólności tekstu Nowożyłowa[14] i opisem Naghdiego[12], por. Niordson[15]. Dzięki temu Czytelnik może łatwo zapoznać się z tekstem Nowożyłowa (i podobnymi) oraz lepiej wczuć się w opis tensorowy.

Opis ortogonalny niekrzywiznowy nie stanowi utrudnienia przy wyprowadzeniu równań równowagi (lokalnych), por. p.5.5 w [1]. Tak otrzymane równania równowagi warto porównać z równaniami równowagi powłoki rozumianej jako ciało powierzchniowe (*direct approach*), por. p. 5.7 w [1]. Odkrywamy, że tożsamość algebraiczna łącząca siły wewnętrzne, będąca konsekwencją związku symetrii $\sigma^{12} = \sigma^{21}$, ma też sens tzw. szóstego równania równowagi.

Teraz trzeba określić związki konstytutywne. Trzeba wstawić związki fizyczne do definicji sił wewnętrznych. Trudność leży w tym, że opis poza powierzchnią środkową jest nieortogonalny a my mamy ambicję nie używać zapisów tensorowych, aby utrzymać przyjętą konwencję dydaktyczną. Jak to zrobić, uczy podręcznik [1], p. 5.8 i 5.9. Przypomnijmy tutaj, iż wkraczając w opis nieortogonalny, bez pomocy rachunku tensorowego, czujemy się jak ślepy bez laski i przewodnika.

Niestety, plan ten nie został wykonany do końca, gdyż podane wzorami (5.127,[1]) związki konstytutywne II przybliżenia nie dają symetrii formy dwuliniowej. Profesor Mazurkiewicz zadbał tylko o to, aby było spełnione szóste równanie równowagi a niżej podpisany nie poprawił tego wyniku. Natomiast oba te kryteria poprawności są spełnione w opisie krzywiznowym; wtedy otrzymuje się znane równania Łuriego (5.130,[1]), por. p.6.6.

Studentów należy teraz wciągnąć w *dramat niejednoznaczności* opisu zachowania się powłok cienkich w ramach teorii I przybliżenia. Od razu powiedzmy tutaj, że Profesor Mazurkiewicz najbardziej akceptował model Nowożyłowa w opisie krzywiznowym. Miał nadzieję, że uda mu się znaleźć jego proste uogólnienie na opis ortogonalny niekrzywiznowy. Ten plan nie mógł się powieść, teraz to wiemy, por. uwagi na str.118 w [1]; dodajmy, iż model Berdiczewskiego pogwałca analogię geometryczno-statyczną. Warto jednak zauważyć, że zaakceptowane przez środowisko teoretyków modele Budiansky’ego-Sandersa-Koitera (BSK) oraz Sandersa-Leonarda (nazywany w literaturze matematycznej modelem Koitera, por.[2]) są dziwaczne. W tym ostatnim modelu siły podłużne nie mają wiele wspólnego z wypadkowymi naprężeniami wzdłuż linii parametrycznych. W obu modelach dziwnie wyglądają definicje sił brzegowych. Zauważmy, że nawet w ujęciu tensorowym związki między zmianami krzywizn i przemieszczeniami są bardzo złożone; w BSK związki te zawierają trudne do zaakceptowania współczynniki $\frac{3}{4}$ i $\frac{1}{4}$, por. (16.3.12, [2]). Oczywiście nic na to nie poradzimy. Warto jednak ukazać studentom te trudności modelowania matematycznego. Przy okazji studenci uświadamiają sobie, że definicje sił wewnętrznych i odkształceń nie są jednoznaczne, ale że miary te muszą być energetycznie sprzężone. Nareszcie wchodzi tu ukradkiem jakąś cząstka myśli z dorobku Rodneya Hilla, jakże zlekceważonego w dydaktyce na politechnikach. Jest też okazja, aby uświadomić studentom, że kryterium ruchu sztywnego nie jest zewnętrzne wobec teorii jako odbłask mechaniki teoretycznej, lecz jest związane z warunkiem dodatniej określoności energii, por. p.6.1. Pomaga tutaj twierdzenie Bonnetta i zezwala na ominięcie dowodu Bernardou i Ciarleta, por. Bernardou[16]. Twierdzenie to mówi że zerowanie się obu pól odkształceń pociąga za sobą klasę deformacji postaci nieskończenie małego ruchu sztywnego.

Dzięki wstępowi z rachunku wariacyjnego można przekonać studentów, że niektóre otrzymane modele są matematycznie poprawne, gdyż zapewniają jednoznaczność rozwiązań w zakresie powłok dobrze podpartych. Nie omawia się tylko kwestii istnienia rozwiązań, ale ta jest treścią nauk matematycznych i jest do pewnego stopnia sprawą umowną, związaną z regularnością danych.

Cytowana analogia geometryczno-statyczna w modelu Nowożyłowa (por. p. 6.4.2, [1]) nie jest ozdobnikiem, lecz pełni istotną rolę w metodyce Reissnera-Meissnera, por. p.14 w [1].

Nie można pominąć teorii bezmomentowej, jakże ważnej i jakże subtelnej. Ukazują się tu równania statycznie wyznaczalne, a studentom przypomina się podział konstrukcji prętowych na statycznie wyznaczalne i niewyznaczalne. Tutaj jednak mamy do czynienia z teorią, która dopuszcza deformacje zero-energetyczne, nie będące translacjami lub małymi obrotami całej powłoki. Ta cecha pociąga za sobą zawężenie zastosowań tej teorii do przypadków obciążeń ortogonalnych do tych nowych modów zero-energetycznych. Nietrudno to zrozumieć, gdyż dobrze znamy kratownice kinematycznie zmienne obciążone tak, aby obciążenie dawało zerową pracę na dopuszczalnych ruchach próbnym, zgodnych z więzami. Bez względu na to czy stosujemy czy nie stosujemy teorii bezmomentowej nie należy dopuszczać do powstawania takich deformacji zero-energetycznych w sensie teorii bezmomentowej. Są to tzw. deformacje izometryczne. Warto zbadać takie deformacje w wypadku powłok walcowych, stożkowych i sferycznych. Siódma postać izometrycznej deformacji fragmentu sfery zdobi okładkę książki [1]. Deformacje izometryczne segmentu sfery dane są formułami

$$\begin{aligned} u &= \sin \varphi [A \operatorname{tg}^n(\varphi/2) - B \operatorname{ctg}^n(\varphi/2)] \sin n\vartheta \\ v &= \sin \varphi [A \operatorname{tg}^n(\varphi/2) + B \operatorname{ctg}^n(\varphi/2)] \cos n\vartheta \\ w &= \sin \varphi [A(n + \cos \varphi) \operatorname{tg}^n(\varphi/2) + B(-n + \cos \varphi) \operatorname{ctg}^n(\varphi/2)] \cos n\vartheta \end{aligned}$$

znany od stu pięćdziesięciu lat, cytowanymi w książkach Love'a[17] i Flüggego[18]. Wielkości u, v, w określają przemieszczenia powierzchni środkowej powłoki w kierunkach równoleżnikowym, południkowym, i prostopadłym do powłoki. Stałe A i B są dowolne. Parametr n przebiega liczbami naturalnymi. Przypadek $n=1$ odpowiada sztywnemu obrotowi całej powłoki. Gdy $n>1$ otrzymujemy deformacje izometryczne nie będące ruchami sztywnymi. Znalazienie kilku pierwszych postaci deformacji izometrycznych segmentu sfery i oprogramowanie tych formuł w języku Maple (por. Załącznik z wydrukiem programu) jest pouczającym ćwiczeniem dla studentów; wyniki przedstawiono na Rys.1. Zauważmy, że przy większych n deformacje izometryczne stanowią zamarszczenia brzegu swobodnego. Po raz kolejny mamy więc dowód na to, iż stany bezmomentowe mogą być realizowane daleko od strefy brzegowej a brzegi powinny być specjalnie wzmacniane wieńcami lub żebrami.

Profesor Mazurkiewicz dużą wagę przykładął do teorii Własowa, tzw. teorii technicznej (w nomenklaturze rosyjskiej). Można zauważyć, że teoria ta jest konstruowana na dwu założeniach, por. p.9.1, [1]. Interesujące jest to drugie założenie- utrzymanie w mocy analogii geometryczno-statycznej. Znowu stosuje się podejście wariacyjne i jest to niezbędne narzędzie modelowania. Powtórzmy jeszcze raz: nie ma innego sposobu wyprowadzenia równań Własowa niż ten użyty w p.9.1 [1]: narzucenie uproszczeń Własowa na wariacyjne równanie równowagi. Potem dalsze wzory stają się jasne: pojawiają się nowe uproszczenia w równaniach równowagi i warunkach brzegowych, ale są one logicznie otrzymane.

Zginanie powłoki helikoidalnej (str.151-157 w [1]) omówiono ideowo poprawnie, ale wyniki na Rys.9.1 są bardzo niedokładne. Poprawne wyniki opublikowano w pracy Knabla i Lewińskiego[19], gdzie skorzystano także z wyników O'Mathuna[20] opartych na opisie BSK.

Na teorię powłok małowyniosłych zazwyczaj nie wystarcza już czasu. Studenci są proszeni o samodzielne przestudiowanie p.10 [1]. Podkreśliśmy że równania te są takie same jak równania płyt o wstępnych krzywiznach.

Ostatnim ważnym rozdziałem jest statyka powłok obrotowych. Korzysta się albo z opisu Nowożyłowa albo z opisu Łuriego (II przybliżenie). Niemniej jednak każda powłoka ma swoją specyfikę. Na przykład zachowanie się wyjątkowo ważnej powłoki walcowej warto badać równaniami Koitera, por. Niordson[15]. Niestety, pewne formuły tam podane są źle napisane, poprawiono je w pracy Bieleckiego i Lewińskiego[21]. Ten materiał nie jest wykładany studentom.

Dość dokładnie omawia się metodę Meissnera przeformułowania równań obrotowo-symetrycznego zginania powłok obrotowych. Nowymi niewiadomymi są wielkości sprzężone w analogii geometryczno-statycznej, na co studentom zwraca się uwagę już wcześniej, por. (11.68a) str 198 w [1]. Widać tam analogię między równaniem nierozdzielności i równaniem równowagi. To pierwsze równanie mówi, że kąt obrotu stycznej do południka da się wyrazić za pomocą względnych wydłużeń włókien. To drugie równanie mówi, że siła poprzeczna wyraża się przez momenty zginające. Zastosowanie równań Meissnera jest ilustrowane przykładem zastosowania szeregów potęgowych w odniesieniu do powłoki sferycznej; korzysta się z pracy Nagórskiego[21], por. [23].

Metoda zaburzeń brzegowych wprowadza istotne uproszczenia do równań Meissnera-Reissnera, ale w czasie zajęć nie ma już czasu aby te uproszczenia porządnie umotywić. W wypadku powłoki stożkowej korzysta się dodatkowo z przybliżeń Geckelera (p.14.4.3). Jednak podane w [1, p.14.4.3] formuły (dziękuję tu za pomoc panu Sławomirowi Olszewskiemu) są bardziej skomplikowane niż te stosowane zazwyczaj i cytowane w innych książkach. Okazało się bowiem, że lepiej podać formuły poprawne i dość złożone, niż uproszczone, gdyż traci się wówczas sprawdziany pewnych warunków nierozdzielności.

Druga praca domowa dotyczy statyki zbiornika złożonego z segmentów powłok sferycznych, stożkowych i walcowych, niekiedy wzmocnionych pierścieniami lub współpracujących z płytami dennymi na podłożu Winklera. Projekt ten jest dość złożony, jednak np. MathCad bardzo pomaga w jego wykonaniu. Projekt ten jest ważny dydaktycznie, gdyż studenci przypominają sobie metodę sił, teorię prętów zakrzywionych w planie, teorię bezmomentową powłok oraz metodę zaburzeń brzegowych. Największe kłopoty sprawia znajdowanie przemieszczeń, gdyż pojawiają się tam kłopotliwe całki z sił poprzecznych oraz nowe stałe całkowania. Ich wyznaczenie może być pracochłonne; wymaga też dobrego zrozumienia pracy całej konstrukcji powłokowej.

4. UWAGI KOŃCOWE

Wykład nie obejmuje szeregu ważnych zagadnień : zachowania się powłok anizotropowych, w tym warstwowych (jest tylko model płyty warstwowej), zagadnień dynamicznych oraz stateczności powłok. Mimo korzystania z kilku formuł mechaniki nieliniowej tematyka dużych deformacji lub dużych przemieszczeń i obrotów leży poza zakresem wykładu. Wydaje się, że z uwagi na trudności merytoryczne tej tematyki, dobrze widoczne w pracach Libai i Simmondsa [24] oraz Pietraszkiewicza [25], wykłady takie należy przesunąć na studia doktoranckie. Ponadto, dostępny system ABAQUS zezwala na nieliniową analizę pracy powłok a własnego oprogramowania nie mamy. Ponadto, zagadnienia stateczności są trudne do opisanie teoriami zlinearyzowanymi. Znane fakty o złej zgodności wyników klasycznych teorii stateczności powłok walcowych (por. Flügge[18]) z wynikami doświadczalnymi zniechęca do nauczania tej tematyki. Z kolei wprowadzenie imperfekcji wykracza poza studia magisterskie i nie jest łatwe w stosowaniu; w istocie potrzebne są dane stochastyczne z zakładów produkcyjnych. Wydaje się, że uzupełnienie wykładu o stateczność wymaga ukonkretnienia rozważań. Poza wykładem znalazły się też metody numeryczne bazujące na metodzie elementów skończonych, które są przedmiotem osobnych kursów.

Należy wyrazić nadzieję, iż tematyka omówiona w tym referacie będzie utrzymana na Specjalizacji Komputerowa Analiza Konstrukcji (KAK), która ruszy od października 2002 r., i że uda się zachować tradycję tej dydaktyki.

5. LITERATURA

- [1] Mazurkiewicz,Z.E.: *Cienkie Powłoki Sprężyste. Teoria Liniowa. Uzupełnił i do druku przygotował Tomasz Lewiński. Oficyna Wydawnicza PW, Warszawa1995.*
- [2] Lewiński,T., Telega,J.: *Plates, Laminates and Shells. Asymptotic Analysis and Homogenization . World Scientific. Series on Advances in Mathematics for Applied Sciences vol.52, , 2000, Singapore, New Jersey, London, Hong Kong*
- [3] Sulanke,R., Wintgen,P.: *Geometria różniczkowa i teoria wiązek, Seria: Matematyka dla Politechnik, PWN Warszawa 1977*
- [4] Reissner,E.: *The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. ASME J.Appl.Mech.Vol. 12, str.A69-A77, 1945*
- [5] Nečas,J., Hlavaček,I.: *Mathematical Theory of Elastic and Elasto-Plastic Bodies. An Introduction.Elsevier, Rotterdam, 1981.*
- [6] Duvaut, G., Lions, J.-L.: *Inequalities in Mechanics and Physics. Springer-Verlag, Berlin, 1976.*

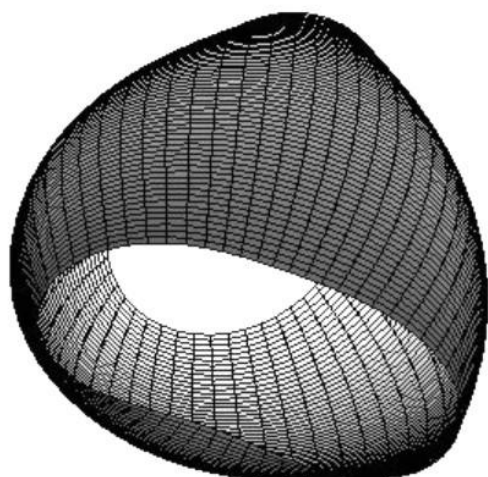
- [7] Reissner, E.: *On a variational theorem in elasticity*, *J.Math.Phys.* Vol. **29**, str. 90-95, 1950
- [8] Hencky, H.: *Über die Berücksichtigung der Schubverzerrung in ebenen Platten*. *Ing.Arch.* Vol. **16**, str. 72-76, 1947.
- [9] Jemielita, G.: *Metoda dystrybucyjna znajdowania ugięć płyt prostokątnych dowolnie obciążonych*, *Arch.Inż. Łąd.* **20**(1974) nr 1, str. 35-48; por. *Bull.Pol.Acad. Sci. Ser.Tech.* **20**, 1972, str. 385-391
- [10] Łukasiewicz, S.: *Obciążenia skupione w płytach, tarczach i powłokach*, Warszawa PWN 1976
- [11] Wojewódzki, W.: *Nośność graniczna płyt*. Oficyna Wydawnicza PW Warszawa 1995
- [12] Naghdi, P.M.: *Foundation of Elastic Shell Theory*. In: *Progress in Solid Mechanics*. Eds: I.N.Sneddon, R.Hill. Vol. **4**, str. 2-90, North-Holland, Amsterdam, 1963.
- [13] Lewiński, T., Nagórski, R.: *Profesor Zbigniew Mazurkiewicz-wspomnienie*, *J.Theoret.Appl.Mech. (Mech.Teoret.Stos)* Vol. **38** (2000) No 1, str. 192-202.
- [14] Nowożyłow, W.W. (Novozhilov, V.V.): *Thin Shell Theory*. Walters-Nordhoff, Groningen 1970. Wyd.po ros.: 1951, Leningrad.
- [15] Niordson, F.I.: *Shell Theory*. North-Holland. Amsterdam, 1985.
- [16] Bernadou, M.: *Finite Element Methods for Thin Shell Problems*. J.Wiley, Chichester, Masson. Paris 1996.
- [17] Love, A.E.H. A.: *Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, Cambridge 1927, wyd.4.
- [18] Flügge, W.: *Powłoki. Obliczenia Statyczne*. Arkady, Warszawa 1972.
- [19] Knabel, J., Lewiński, T.: *Selected equilibrium problems of thin elastic helicoidal shells*, *Arch.Civil Eng. (Arch.Inż. Łądowej)*, Vol. **45**, nr.2, 1999, str. 245-257
- [20] O'Mathuna, D.: *Rotationally symmetric deformations in helicoidal shells*. *J.Math.Phys.* Vol. **42**, 1963, str.85-111.
- [21] Bielecki, T., Lewiński, T.: *Static analysis of closed cylindrical shells subjected to asymmetric loading*, *Arch.Civil Eng (Arch.Inż. Łądowej)* Vol. **45**, Nr.2, 1999, str.147-161
- [22] Nagórski, R.: *Zginanie powłoki sferycznej obciążonej ciężarem własnym*. *Rozpr. Inż.* Vol. **25**, 1977, str. 513-522.
- [23] Mazurkiewicz, Z.E., Nagórski, R.T., *Powłoki obrotowe sprężyste*. PWN Warszawa 1987
- [24] Libai, A., Simmonds, J.G., *The nonlinear theory of elastic shells*. 2nd ed. Cambridge University Press. Cambridge, 1998.
- [25] Pietraszkiewicz, W.: *Geometricall non-linear theories of thin elastic shells*. *Advances in Mechanics*, Vol. **12**, str. 51-130. 1989.

ZALĄCZNIK 1

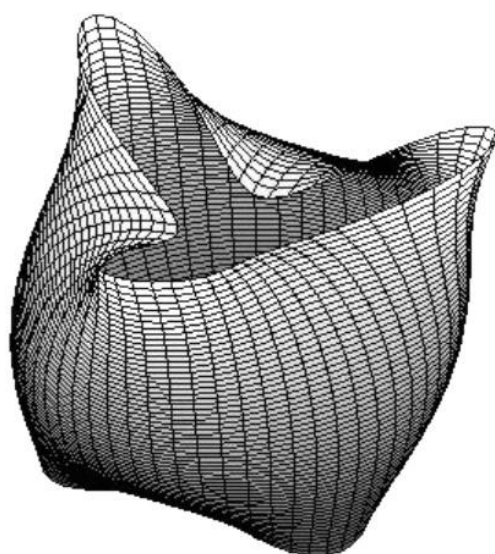
Program w języku MAPLE tworzący wizualizacje deformacji izometrycznych segmentów powłoki sferycznej o promieniu $R=1$.

```
#Deformacje izometryczne segmentu sfery
>R:=1;
# Ustalamy indeks n, jako np.  $n=7$ 
>n:=7;
# Ustalamy wartości stałych A i B;  $A=0$  gdy powłoka jest zamknięta w górnym biegunie;
stałe A,B skalują wartości przemieszczeń i trzeba ich wartości tak dobrać aby otrzymać
przejrzysty obraz deformacji powłoki
> A:=0*R/n/2;
> B:=R/n/1000/2;
> u1:=sin(p)*(A*(tan(p/2))^n-B*(tan(p/2))^(-n));
> v1:=sin(p)*(A*(tan(p/2))^n+B*(tan(p/2))^(-n));
>w1:=(n+cos(p))*A*(tan(p/2))^n+B*(cos(p/2)-n)/((tan(p/2))^n);
# Obliczanie przemieszczeń (u, v,w):
> u:=sin(n*t)*u1;
> v:=v1*cos(n*t);
>w:=w1*cos(n*t);
# Obliczanie współrzędnych konfiguracji odkształconej;  $p$  reprezentuje kąt  $\varphi$  mierzony
wzdłuż południka  $t$  – kąt  $\vartheta$  mierzony wzdłuż równoleżnika
> x:=R*cos(t)*sin(p)+u*(-sin(t))+v*cos(p)*cos(t)-w*sin(p)*cos(t);
> y:=R*sin(t)*sin(p)+u*(cos(t))+v*cos(p)*sin(t)-w*sin(p)*sin(t);
>z:=R*cos(p)-v*sin(p)-w*cos(p);
# Tworzenie obrazu konfiguracji odkształconej przy konkretnych danych określających
zakres współrzędnych sferycznych (p,t):
>plot3d([x,y,z],p=0.25*Pi..Pi,t=0..2*Pi,grid=[60,60],title=`Deformacja      izometryczna
wycinka sfery. Indeks n=7`);
```

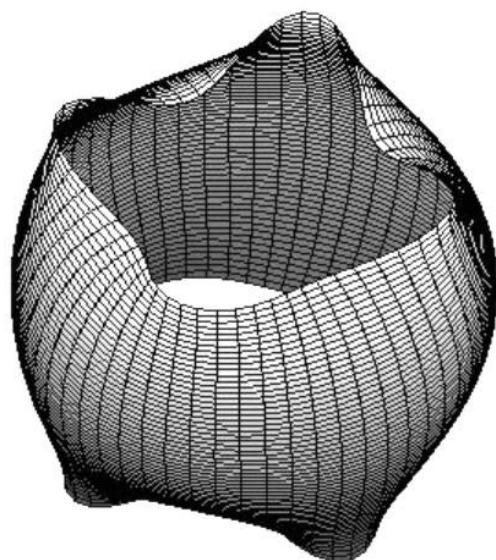
(a)



(b)



(c)



Przykładowe deformacje izometryczne wycinka sfery